Niedersächsisches Kultusministerium
Referat 33 / Logistikstelle für zentrale Arbeiten

April 2012

Musteraufgaben für das Fach Mathematik

zur Vorbereitung auf die länderübergreifende Abiturprüfung 2014

Hinweise und Erläuterungen zu den Musteraufgaben im Fach Mathematik

Das Land Niedersachsen hat sich entschieden, gemeinsam mit weiteren Ländern ab der Abiturprüfung 2014 länderübergreifend entwickelte gemeinsame Aufgaben oder Aufgabenteile für die Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau einzusetzen.
Dabei sind die Beruflichen Gymnasien noch nicht einbezogen.
Mit dieser Entscheidung ist für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik eine Änderung des Prüfungsformats verbunden. Länderübergreifend gemeinsame Aufgaben werden für einen Zeitumfang von 45 Minuten in einem insgesamt 60 Minuten umfassenden hilfsmittelfreien Teil in den Prüfungen für das erhöhte Anforderungsniveau gestellt. Dabei werden die durch die Abiturkommission ausgewählten länderübergreifenden Aufgaben länderspezifisch ergänzt.
Auf den gesamten hilfsmittelfreien Prüfungsteil entfallen ca. 22 % der insgesamt 120 Bewertungseinheiten der Aufgabenstellungen auf erhöhtem Anforderungsniveau.
In den Prüfungen auf grundlegendem Anforderungsniveau wird der hilfsmittelfreie Prüfungsteil ebenfalls eingeführt. Dabei beträgt der zeitliche Umfang 45 Minuten und die Aufgaben werden durch die Niedersächsische Fachkommission Mathematik erstellt. Es entfallen ca. 22 % der ca. 90 Bewertungseinheiten auf diesen Prüfungsteil.

Unabhängig von der Teilnahme Niedersachsens an dem Vorhaben „Länderübergreifendes Abitur“ ist die Einführung eines hilfsmittelfreien Teils in der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik vor dem Hintergrund der aktuellen fachdidaktischen Diskussion von besonderer Bedeutung. Dabei ist auch mit Blick auf die vielen Schnittstellen innerhalb von Schule und beim Übergang zum Studium oder zur Berufsausbildung dem Erfordernis Rechnung zu tragen, hilfsmittelfrei zur Verfügung stehende Kompetenzen im Fach Mathematik nachhaltig zu sichern. In der gesamten fachlichen Diskussion wird ein sinnstiftender Rechnereinsatz bei gleichzeitiger Betonung der „rechnerfreien Fertigkeiten“ deutlich herausgestellt. Diese Schwerpunktsetzung greift die unterrichtliche Arbeit der niedersächsischen Modellversuche „Calimero“ und auch „Mabikom“ auf. Die Einführung eines hilfsmittelfreien Teils wird durch die bereits vorliegenden Ergebnisse der wissenschaftlichen Begleitung und Evaluation des niedersächsischen Modellversuchs „Calimero“ besonders gestützt.

Prüfungsaufgaben sollen ein breites Spektrum des verständigen Umgangs mit der im Unterricht vermittelten Mathematik erfassen. Daher bleibt neben einem hilfsmittelfreien Teil ein zeitlich wesentlich umfassenderer, auf den bisherigen Hilfsmitteleinsatz gestützter Teil der Abiturprüfung weiterhin notwendig. In diesem zweiten Prüfungsteil sind dann – wie in Niedersachsen langjährige Tradition - größere Zusammenhänge vor dem Hintergrund prozessbezogener Kompetenzen zu berücksichtigen. Für das Lernen, Festigen und Überprüfen aller Aspekte mathematischer Kompetenz sind dabei technologische und andere Hilfsmittel unverzichtbar.

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik sind die geltenden Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (EPA) und das Kerncurriculum Mathematik für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe, die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe, das Fachgymnasium, das Abendgymnasium und das Kolleg.

Die nachfolgend veröffentlichten Musteraufgaben gelten für alle beteiligten Bundesländer und sind zur vollständigen Übersicht als Gesamtwerk veröffentlicht. Sie umfassen daher auch Aufgaben hinsichtlich der Analytischen Geometrie, die über die Vorgaben des niedersächsischen Kerncurriculums hinausgehen und daher in dieser Form nicht Gegenstand der niedersächsischen Abiturprüfung sein können. Diese sind gesondert gekennzeichnet.

Die Musteraufgaben sind so konzipiert, dass für vier Aufgaben ein Bearbeitungszeitraum von ca. 45 Minuten vorzusehen ist. Sie beziehen sich auf den länderübergreifenden Teil der Abiturprüfung für die Prüfung auf erhöhtem Anforderungsniveau.

Die Darstellung der erwarteten Schülerleistungen zu den einheitlichen länderübergreifenden Aufgabenstellungen wurde entsprechend der in den beteiligten Ländern üblichen Form angepasst.

Für eine Klausur im Herbst 2013 werden Aufgabenpools für Kurse auf erhöhtem Niveau bereitgestellt, aus denen die Fachlehrerinnen und Fachlehrer vier Aufgaben unter Berücksichtigung der Hinweise in den Vorbemerkungen (vgl. S. 3) des bis dahin erfolgten Unterrichts für die Bearbeitung auswählen und diese zu einer Gesamtklausur ergänzen. Näheres zu dieser Klausur wird gesondert mitgeteilt.

Aufgabenbeispiele für den hilfsmittelfreien Teil der Abiturprüfung auf grundlegendem Niveau werden in den fachbezogenen Fortbildungen zur Verfügung gestellt.

Musteraufgaben
für das Fach
Mathematik

2012

Impressum

Das vorliegende Material wurde von einer Arbeitsgruppe mit Vertretern aus den Ländern Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein erarbeitet.

Herausgeber:

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus

Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern

Niedersächsisches Kultusministerium

Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport

Ministerium für Bildung und Kultur Schleswig-Holstein

Inhaltsverzeichnis

Seite

Vorbemerkungen

Für das Fach Mathematik werden zwei Aufgabenpools vorgelegt, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die in der EPA Mathematik ermöglichten Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Um die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrkräfte mit den Anforderungen der gemeinsamen Prüfungselemente in der zentralen schriftlichen Abiturprüfung ab 2014 vertraut zu machen, wird in den beteiligten Ländern einmalig im Schuljahr 2013/14 ein schriftlicher Leistungsnachweis eingesetzt. Dafür werden in analoger Weise zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung Aufgabenpools bereitgestellt. Die Durchführung des schriftlichen Leistungsnachweises und die Auswahl der Aufgaben aus den Aufgabenpools werden in den Ländern geregelt.

Die vorliegenden Musteraufgaben sollen den Lehrkräften sowie den Schülerinnen und Schülern eine Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis geben.

1 Musteraufgaben für Aufgabenpool 1

1.1 Analysis

A1_1

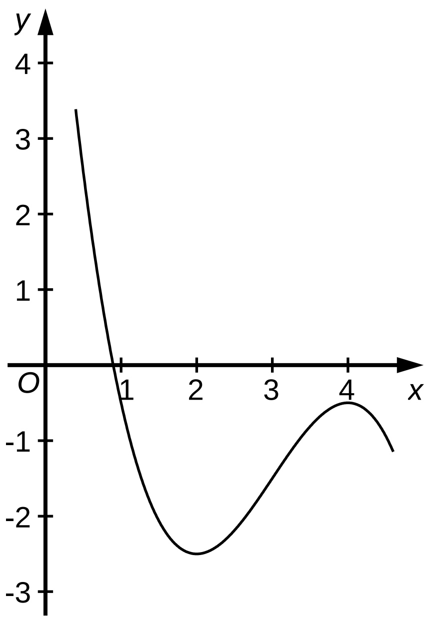
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

1.1 Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat.

2 BE

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

3 BE



	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_1		
1.1	Begründung Z. B.: Im Graphen ist eine Nullstelle erkennbar. Aufgrund der im Graphen ersichtlichen lokalen Extrempunkte kann es keine weiteren Nullstellen geben, da hier beide lokalen Extrempunkte unterhalb der x-Achse liegen und keine weiteren lokalen Extrempunkte bei einer Funktion dritten Grades möglich sind.	2
1.2	Die Wendestelle ergibt sich aus der Bedingung $f''(x_W) = 0$. $f''(x) = -3 \cdot x + 9$ liefert $x_W = 3$. Koordinaten des Wendepunktes: $(3 \mid -1{,}5)$ (Die Existenz des Wendepunktes kann aufgrund der Formulierung der Aufgabe vorausgesetzt werden.)	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

A1_2

Das Rechteck *ABCD* mit $A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(4|2)$ und $D(1|2)$ wird durch den Graphen der Funktion *f* mit $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad (x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$ in zwei Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

5 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
A1_2	Berechnung des Flächeninhaltes unterhalb des Graphen von *f*: $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ Berechnung des Flächeninhaltes oberhalb des Graphen von *f*: $2\cdot 3-\frac{14}{3}=\frac{4}{3}$ Angabe des Verhältnisses: 7 : 2	5
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

G1_1

Diese Aufgabe geht über die Vorgaben des niedersächsischen Kerncurriculums hinaus und kann daher in dieser Form nicht Gegenstand der niedersächsischen Abiturprüfung sein.

Gegeben sind die Ebene $E: \ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P\left(-3 \middle| 0 \middle| 2\right)$.

1.1 Zeigen Sie, dass der Punkt *P* nicht in der Ebene *E* liegt.

1 BE

1.2 Spiegelt man den Punkt *P* an der Ebene *E*, so erhält man den Punkt *P´*.
Ermitteln Sie die Koordinaten von *P´*.

4 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1	Hinweis: Diese Aufgabe geht über die Vorgaben des niedersächsischen Kerncurriculums hinaus und kann daher in dieser Form nicht Gegenstand der niedersächsischen Abiturprüfung sein.	
1.1	Da gilt $2 \cdot (-3) - 0 - 2 = -8 \neq 0$, liegt P nicht in der Ebene E.	1
1.2	Lotgerade zu *E* durch *P*: z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ Parameter des Lotfußpunktes: $\lambda = 2$ Ansatz für die Ermittlung der Koordinaten von *P´*: z. B. $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda = 2$ Koordinaten von *P´*: $P'\left(5 \middle| 4 \middle| -2\right)$	4
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G1_2

Gegeben ist das Viereck *ABCD* mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(-3|1|4)$, $C(2|-4|4)$ und $D(5|-5|0)$.

1.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

3 BE

1.2 Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ an.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_2 1.1	Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, da $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Da zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind, ist das Viereck ein Parallelogramm. Es gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$, da $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -15 - 5 + 0 = -20 \neq 0$. Da zwei benachbarte Seiten nicht orthogonal zueinander sind, ist das Viereck kein Rechteck.	3
1.2	$\overrightarrow{x_M} = \overrightarrow{x_A} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Koordinaten des Mittelpunktes: $M(1|-2|2)$ $r = \left\lvert \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$	2

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.

1.2.2 Lineare Algebra

LA1_1

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.1 Es gelte $\overrightarrow{v_{i+1}} = A \cdot \overrightarrow{v_i}$ mit $i \in \mathbb{N}$.

Berechnen Sie $\overrightarrow{v_2}$.

2 BE

1.2 Bestimmen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit den kleinstmöglichen Werten $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

so, dass $A \cdot \vec{w} = \vec{w}$ gilt.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA1_1		
1.1	$\overrightarrow{v_1} = A \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 40 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = A \cdot \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{1}{20} \\ 4 \end{pmatrix}$	2
1.2	$\begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liefert I) $20 \cdot y = x$ II) $\frac{1}{2} \cdot z = y$ III) $\frac{1}{10} \cdot x = z$ Für $y = 1$ erhält man $z = 2$ und $x = 20$. Da z und x Vielfache von y sind, ist dies die Lösung mit den kleinsten natürlichen Zahlen größer als null.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

LA1_2

Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ sowie eine Matrix *C*.

1.1 Zeigen Sie, dass *B* die zu *A* inverse Matrix ist.

2 BE

1.2 Für die Matrix *C* gilt:

$C\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ und $C\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Begründen Sie, dass gilt: $C\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA1_2 1.1	B ist die zu A inverse Matrix, da gilt: $A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-1)+2\cdot3 & 5\cdot2+2\cdot(-5)\\ 3\cdot(-1)+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.	2
1.2	Es gilt: $C\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=C\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=C\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.3 Stochastik

S1_1

Die Zufallsvariable *X* ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

1.1 Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von *X* darstellt.
Begründen Sie Ihre Auswahl.

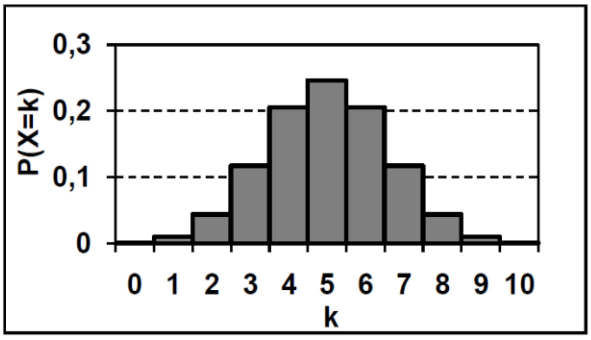


Abbildung 1

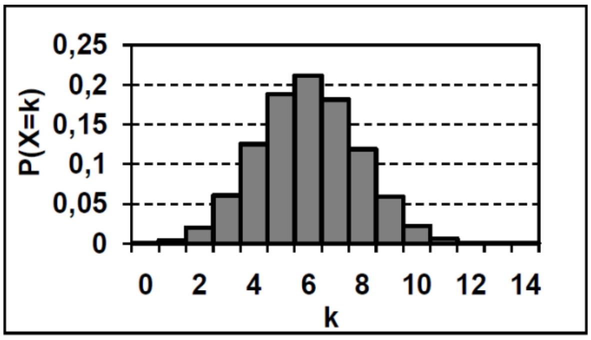


Abbildung 2

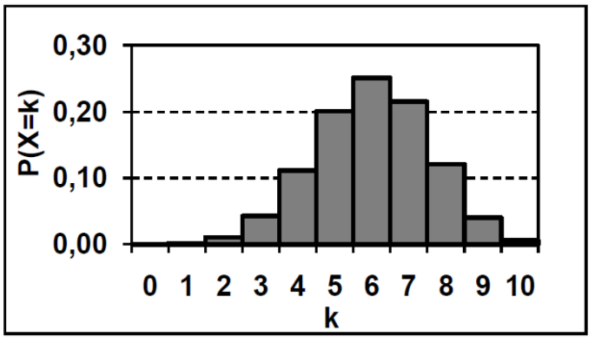


Abbildung 3

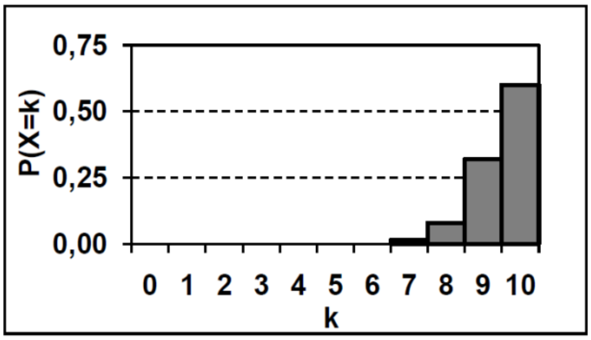


Abbildung 4

3 BE

1.2 Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 < X < 7)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \neq 5)$ an.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S1_1		
1.1	Abbildung 3 zeigt die Verteilung von *X* $E(X) = 10 \cdot 0{,}6 = 6$, deshalb entfallen die Abbildungen 1 und 4. Da in Abbildung 2 $P(X = 11) > 0$ angegeben ist, entfällt auch diese.	3
1.2	Wahrscheinlichkeit: $P(4 < X < 7) \approx 0{,}45$ Wahrscheinlichkeit: $P(X \neq 5) \approx 0{,}8$	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

S1_2

In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1: 6 rote und 4 blaue Kugeln

U_2: 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

2 BE

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U_1 stammt.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S1_2 1.1	$P(\text{„beide Kugeln haben die gleiche Farbe"}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{7}{15}$	2
1.2	Mithilfe eines Baumdiagramms erhält man: $P(E_2)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{3}{4}$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

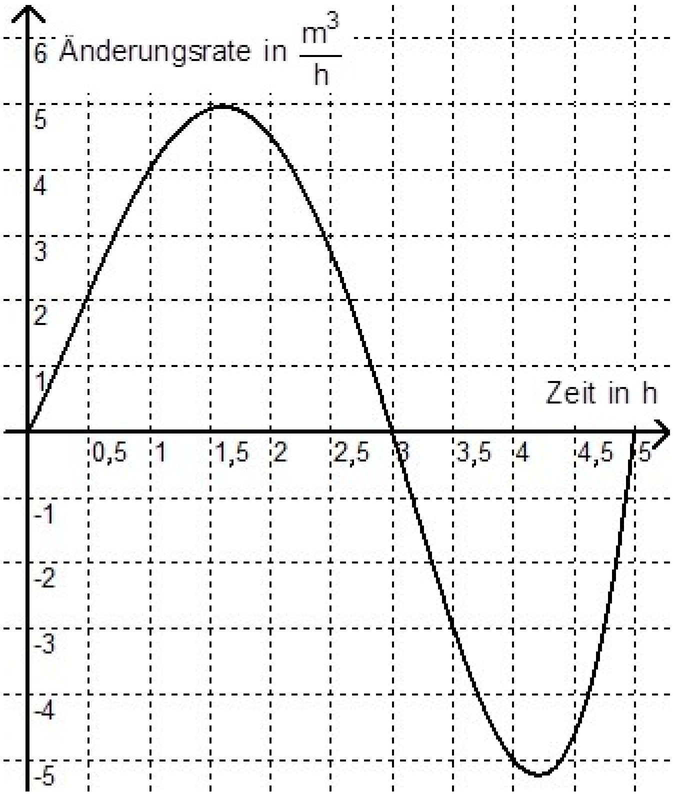
2 Musteraufgaben für Aufgabenpool 2

2.1 Analysis

A2_1

Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von $5\ \text{m}^2$ und ist zunächst leer.

Der nebenstehende Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate $\left(\text{in } \frac{\text{m}^3}{\text{h}}\right)$ der Flüssigkeit über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.

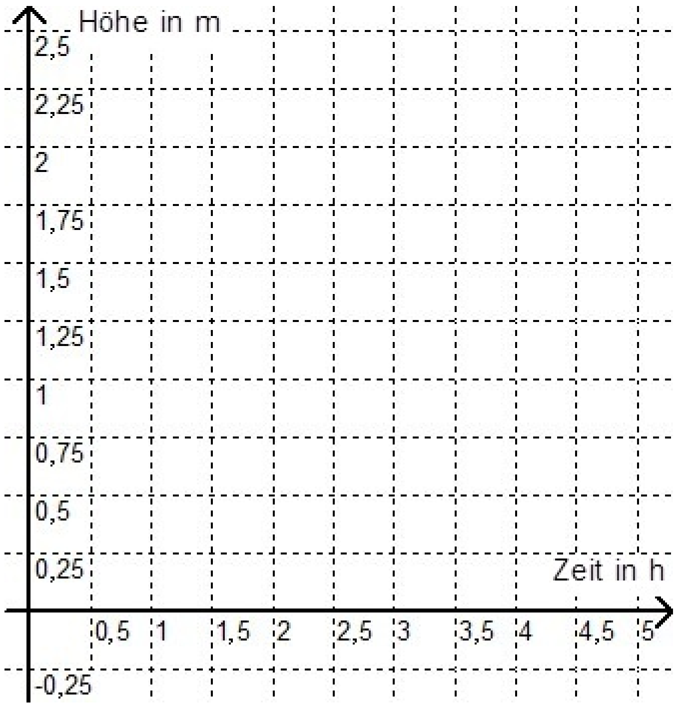


2.1 Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.

2 BE

2.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.

3 BE



	Erwartete Schülerleistungen	BE
A2_1		
1.1	Anhand der Quadrate zwischen dem Graphen und der Zeitachse im Bereich der ersten drei Stunden erhält man einen Schätzwert für die Flüssigkeitsmenge. Da jedes Quadrat einem Zufluss von $0{,}5\ \text{m}^3$ entspricht, ergeben sich Schätzwerte zwischen $7\ \text{m}^3$ und $10\ \text{m}^3$	2
1.2	Skizze eines sachgerechten Graphen (Verlauf durch $(0 \mid 0)$; alle Punkte im ersten Quadranten; Maximum an der Stelle 3; Minimum an der Stelle 5, dort Funktionswert größer 0)	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

A2_2

Für jeden Wert für a $\left(a \in \mathrm{IR}, a \neq 0\right)$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a\left(x\right) = \mathrm{e}^{a \cdot x^2}$ $\left(x \in \mathrm{IR}\right)$.

Zeigen Sie, dass die Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt $P_a\left(1 \middle| f_a(1)\right)$ durch die Gleichung $t_a\left(x\right) = 2 \cdot a \cdot e^a \cdot x + e^a \cdot \left(1 - 2 \cdot a\right)$ beschrieben werden kann.

5 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
A2_2	In der Tangentengleichung gibt der Term $2 \cdot a \cdot e^a$ die Steigung an. $f_a'\left(x\right) = 2 \cdot a \cdot x \cdot e^{a \cdot x^2}$; $f_a'\left(1\right) = 2 \cdot a \cdot e^a$; die Steigungen stimmen überein. $f_a\left(1\right) = e^{a \cdot 1} = e^a$; $t_a\left(1\right) = 2 \cdot a \cdot e^a \cdot 1 + e^a \cdot \left(1 - 2 \cdot a\right) = e^a$; die Funktionswerte von f_a und t_a stimmen an der Stelle 1 überein. Damit beschreibt t_a die Tangente an den Graphen von f_a an der Stelle 1. Insbesondere sind bei dieser Aufgabe Wege zur Herleitung der Tangentengleichung gleichwertig.	5
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

2.2.1 Analytische Geometrie

G2_1

Diese Aufgabe geht über die Vorgaben des niedersächsischen Kerncurriculums hinaus und kann daher in dieser Form nicht Gegenstand der niedersächsischen Abiturprüfung sein.

Im Raum sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden g liegt, gegeben.

Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte B und C der Geraden g, die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.

5 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G2_1	***Hinweis: Diese Aufgabe geht über die Vorgaben des niedersächsischen Kerncurriculums hinaus und kann daher in dieser Form nicht Gegenstand der niedersächsischen Abiturprüfung sein. Prinzipiell ist diese Aufgabe zwar bearbeitbar, überschreitet aber hinsichtlich Anspruch und Bearbeitungsumfang den Rahmen des Aufgabenformats.***	
	Man wählt den Punkt B als Fußpunkt des Lots durch A auf g. Anschließend berechnet man den Abstand d der Punkte A und B. Ist $\overrightarrow{u_0}$ ein Richtungsvektor von g der Länge 1, so ergeben sich die Koordinaten eines geeigneten Punkts C aus $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + d \cdot \overrightarrow{u_0}$. [Bei dieser Aufgabe sind die Bearbeitungswege besonders vielfältig.]	5
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G2_2

Diese Aufgabe geht über die Vorgaben des niedersächsischen Kerncurriculums hinaus und kann daher in dieser Form nicht Gegenstand der niedersächsischen Abiturprüfung sein.

Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit E_1: $6 \cdot x_1 - x_2 - 4 \cdot x_3 = 12$ und E_2: $-3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -6$. Die Punkte $A(2|0|0)$ und $B(0|0|-3)$ liegen in beiden Ebenen.

2.1 Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind.

1 BE

2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten eines von *A* und *B* verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt.

2 BE

2.3 In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht.

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G2_2	***Hinweis: Diese Aufgabe geht über die Vorgaben des niedersächsischen Kerncurriculums hinaus und kann daher in dieser Form nicht Gegenstand der niedersächsischen Abiturprüfung sein.***	
2.1	Punktproben liefern die Begründung.	1
2.2	Gleichung der Geraden g durch *A* und *B*: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ Z. B. ergibt sich für $r = 1$ der Punkt $C(4\,|\,0\,|\,3)$, der auf beiden Ebenen liegt.	2
2.3	Der Koeffizient 5 ist in 0,5 zu verändern. Multipliziert man die veränderte Koordinatengleichung für E_2 mit -2, dann ergibt sich die Koordinatengleichung für E_1.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.2.2 Lineare Algebra

LA2_1

Es gibt 2x2-Matrizen, die besondere Eigenschaften bezüglich ihrer Quadrate besitzen.

2.1 Für jeden Wert für t $(t \in \mathrm{IR}, t \neq 0)$ ist eine Matrix M_t durch $M_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Ermitteln Sie, welche besondere Eigenschaft die Matrizen M_t bezüglich ihrer Quadrate $M_t^{\,2}$ haben.

2 BE

2.2 Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $(a, b, c, d \in \mathrm{IR})$ und $b \cdot c \neq 0$ gilt $A^2 = b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie, welche Werte für die Elemente der Matrix *A* in Frage kommen.

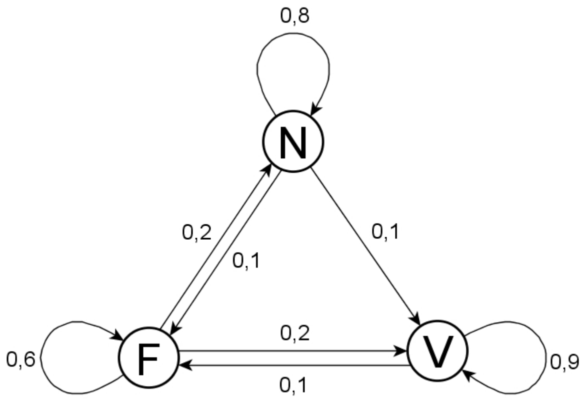
3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA2_1		
2.1	Für $M_t^{\,2}$ ergibt sich $M_t^{\,2} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Quadrate aller Matrizen sind unabhängig von *t* gleich der Einheitsmatrix.	2
2.2	$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b \cdot c & a \cdot b + b \cdot d \\ a \cdot c + c \cdot d & b \cdot c + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b \cdot c & b \cdot (a + d) \\ c \cdot (a + d) & b \cdot c + d^2 \end{pmatrix}$ Aus $b \cdot (a + d) = 0$ und $c \cdot (a + d) = 0$ folgt, dass $(a + d) = 0$ ist, da wegen $b \cdot c = p \neq 0$ weder *b* noch *c* gleich 0 sein kann. Aus $a^2 + b \cdot c = b \cdot c$ folgt $a = 0$ und aus $b \cdot c + d^2 = b \cdot c$ bzw. aus $(a + d) = 0$ folgt $d = 0$. Die Elemente *a* und *d* sind gleich 0, die Elemente *b* und *c* sind ungleich 0.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

LA2_2

Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt:
Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V).

Der abgebildete Graph gibt modellhaft die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer der Kantine konstant bleibt.



2.1 Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \square & 0{,}1 & \square \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$ fehlenden Werte an.

2 BE

2.2 Bestimmen Sie den Wert a_{22} der Matrix: $M^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. 1 BE

2.3 Interpretieren Sie die Bedeutung der zweiten Zeile der Matrix M^2 im Sachzusammenhang.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA2_2 2.1	Dem Graphen entnimmt man folgende Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag: $\begin{pmatrix} F_{t+1} \\ V_{t+1} \\ N_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_t \\ V_t \\ N_t \end{pmatrix}$. Die Matrix, welche die Übergänge beschreibt, stimmt mit der Matrix *M* überein.	2
2.2	Für das mittlere Element der Matrix gilt: $a_{22} = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}83$.	1
2.3	An einem beliebigen Tag setzen sich die Nutzer der Kantine aus Essern des Fleischgerichts, des vegetarischen Gerichts und des Nudelgerichts zusammen. Mit dieser Zusammensetzung liefert die zweite Zeile der Matrix M^2 die Anzahl der Nutzer, die zwei Tage später das vegetarische Gericht auswählen.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.3 Stochastik

S2_1

Verteilungen von Zufallsgrößen werden durch Parameter charakterisiert.

2.1 In den Klassen 10a und 10b, die jeweils aus 25 Schülern bestehen, wurden die Leistungen jedes Schülers im Weitsprung ermittelt. Die Zufallsgrößen *A* und *B* ordnen jeweils einem zufällig ausgewählten Schüler der Klasse 10a bzw. 10b seine Sprungweite in Meter zu. Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt $E(A)=E(B)$, für die Standardabweichungen $\sigma(A)<\sigma(B)$.

Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilungen der Sprungweiten bedeuten.

2 BE

2.2 Eine Zufallsgröße *X* kann fünf unterschiedliche Werte annehmen.

Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße *X* so an, dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert dieser Zufallsgröße liegt.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S2_1		
2.1	Der Durchschnitt der Sprungweiten der Schüler der Klasse 10a stimmt mit dem der Schüler der Klasse 10b überein. Die Sprungweiten der Schüler der Klasse 10a weichen hinsichtlich des vorgegebenen Streuungsmaßes weniger vom jeweiligen Mittelwert ab als die der Schüler der Klasse 10b.	2
2.2	Angabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung x_i: -10, 1, 2, 3, 4 $P(X=x_i)$: 0,6, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1 [Eine BE wird vergeben, wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt.]	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

x_i	-10	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

S2_2

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt *p*.

2.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an:

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“.

B: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.

3 BE

2.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfen dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216.

Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S2_2 2.1	Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A*: $\binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2$ Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *B*: $p^2 \cdot \binom{3}{1} \cdot p \cdot (1-p)^2$	3
2.2	Das Ergebnis “Wappen” ist wahrscheinlicher, da gilt: $0{,}216 > 0{,}5^3$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		