Niedersächsisches Kultusministerium
Referat 33 / Logistikstelle für zentrale Arbeiten

Januar 2016

Aufgaben für das Fach Mathematik

Eingesetzte Abituraufgaben aus dem länderübergreifenden Abituraufgabenpool 2015

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Für das Fach Mathematik stammen die Aufgaben aus zwei Aufgabenpools, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Die vorliegenden Aufgaben sollen die Möglichkeiten der Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis über die veröffentlichten Musteraufgaben hinaus erweitern.

Dabei gilt für Niedersachsen die Einschränkung, dass bis zur Abiturprüfung 2016 die Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen als verbindlicher Inhalt auch Gegenstand der Abiturprüfung war und entsprechende Aufgaben für den Pflichtteil ausgewählt wurden. Für die Abiturprüfung 2015 betrifft das etwa die Aufgabe LA2_1. Ab der Abiturprüfung 2017 werden Inhalte aus der vektoriellen Analytischen Geometrie gemäß der Alternative A2 der Bildungsstandards Gegenstand der Abiturprüfung sein. Damit können auch Aufgaben mit solchen Inhalten aus dem Aufgabenpool für den Pflichtteil ausgewählt werden.

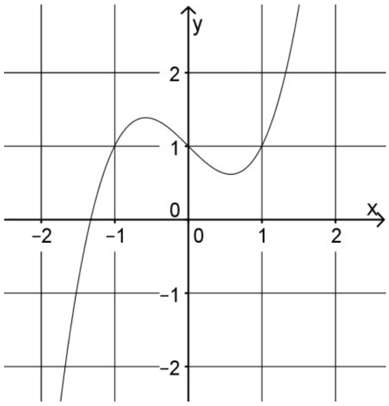
1 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1

1.1 Analysis

A1_1

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.



a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.
Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt.
Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt. (3 BE)

b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h'.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_1 a)	Dargestellt ist der Graph der Funktion g.	3
b)	Die Funktion f ist eine quadratische Funktion, deren Graph nur einen einzigen Extrempunkt haben kann. Es ist $\int_0^1 h'(x)dx = h(1) - h(0) = 3 - 1 = 2$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

A1_2

Für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4, x \in \mathbb{R},$ gegeben.

a) Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat. (3 BE)

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A1_2 a)	Aus $f_a(x) = 0$ folgt $x = 0$ oder $x^2 = \frac{1}{a}$. f_a hat genau dann mehr als eine Nullstelle, wenn gilt: $a > 0$.	3
b)	$f'_a(x) = 6 \cdot a \cdot x^5 - 4 \cdot x^3$ Die notwendige Bedingung für ein Minimum an der Stelle 1 ist $f'_a(1) = 6 \cdot a - 4 = 0$. Daraus folgt $a = \frac{2}{3}$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

G1_1

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D. (3 BE)

b) Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunktes gibt es mehrere Möglichkeiten.
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunktes an. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_1 a)	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ Also gilt: $C(4\|9\|10)$. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$ Also gilt: $D(-4\|-7\|-6)$.	3
b)	Koordinaten zweier Punkte: $(3\|6\|9)$, $(-1\|-2\|1)$ oder $(1\|4\|3)$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G1_2

Betrachtet wird die Pyramide ABCDS mit $A(0|0|0)$, $B(4|4|2)$, $C(8|0|2)$, $D(4|-4|0)$ und $S(1|1|-4)$. Die Grundfläche ABCD ist ein Parallelogramm.

a) Weisen Sie nach, dass das Parallelogramm ABCD ein Rechteck ist. (2 BE)

b) Die Kante $\overline{AS}$ steht senkrecht auf der Grundfläche ABCD.
Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $24 \cdot \sqrt{2}$.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G1_2 a)	Nachweis z.B.: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$	2
b)	Mit $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{18}$ folgt aus dem Ansatz für das Volumen der Pyramide: $\frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 48$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2.2 Lineare Algebra

LA1_1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 23 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 13 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array}\right|$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssytems. (3 BE)

b) Eine der letzen beiden Gleichungen des Gleichungssystems kann weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie Ihre Angabe. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA1_1		
a)	Aus den letzten beiden Gleichungen folgt $x_3 = 5$ und $x_2 = 3$. Dann ergibt sich aus der zweiten Gleichung $x_1 = 2$. Eine Probe in der ersten Gleichung geht auf: $2+2\cdot 3+3\cdot 5=23$.	3
b)	Die dritte Gleichung ist die Differenz zwischen der ersten und zweiten Gleichung. Somit kann diese weggelassen werden.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

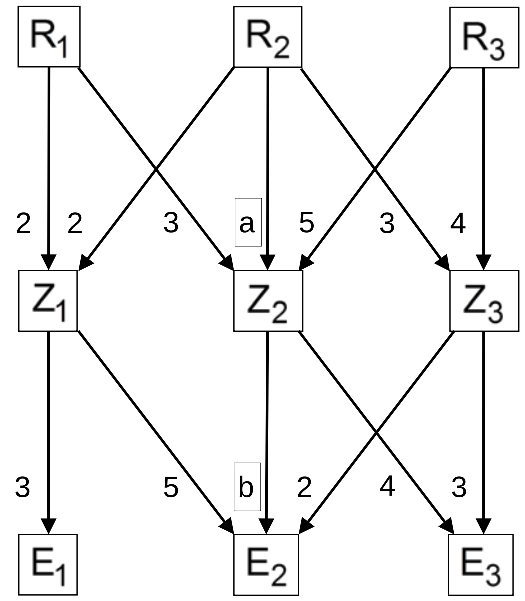
LA1_2

Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden.

Es gibt Werte für a und b, so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph

Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

Anzahl der benötigten Mengen-einheiten der Rohstoffe je Mengen-einheit des Endprodukts

Rohstoff \ Endprodukt	E_1	E_2	E_3
R_1	6	16	12
R_2	6	24	25
R_3	0	18	32

a) Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix RZ, der Zusammenhang Zwischenrodukt-Endprodukt durch eine Matrix ZE und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix RE beschrieben.

Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an. (1 BE)

b) Bestimmen Sie die im Verflechtungsgraphen fehlenden Werte für a und b. (4 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
LA1_2		
a)	$RZ \cdot ZE = RE$	1
b)	Mit $RZ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $ZE = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & b & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $RZ \cdot ZE = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 12 \\ 6 & 24 & 25 \\ 0 & 18 & 32 \end{pmatrix}$ ergibt sich $4 \cdot a + 9 = 25$; $a = 4$ und $3 \cdot b + 10 = 16$; $b = 2$.	4
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.3 Stochastik

S1_1

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

a) Geben Sie Sie für die folgenden Ereignisse jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt.
- Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen.
- Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen. (3 BE)

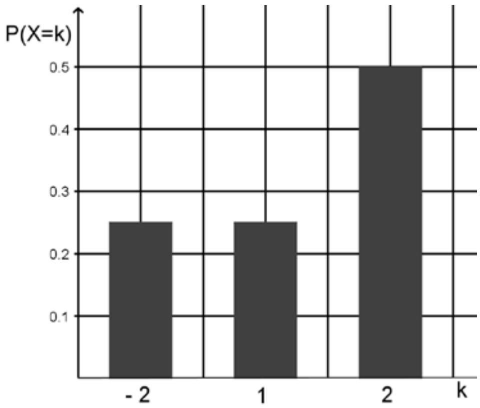
b) Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. (2 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S1_1 a)	• $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ • $p^2 \cdot (1-p)^3$	3
b)	Mögliche Erläuterung: Trifft der Biathlet bei keinem der ersten drei Schüsse, so hat er möglicherweise aufgrund zunehmender Nervosität beim vierten Schuss eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

S1_2

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte -2, 1 und 2 annehmen kann.

In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X. (2 BE)

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S1_2		
a)	Berechnung des Erwartungswertes: $(-2)\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}25 + 2\cdot 0{,}5 = 0{,}75$	2
b)	Die Summe der Werte ist bei drei möglichen Versuchsausgängen negativ: $(-2,-2),(-2,1),(1,-2)$. Als gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich somit: $3\cdot\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2 Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2

2.1 Analysis

A2_1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$.

a) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt. (3 BE)

b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2\,|\,0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3\,|\,2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h.
Geben Sie eine Gleichung von h an. (2 BE)

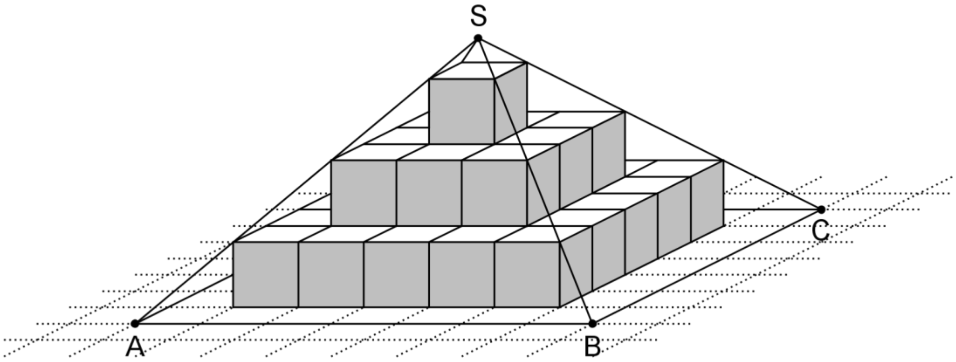
	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
A2_1 a)	$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 11$; $f''(x) = 6 \cdot x - 12$ Aus $6 \cdot x - 12 = 0$ folgt $x = 2$ mit $f(2) = 0$. Der Wendepunkt $W(2\,|\,0)$ liegt auch auf der Geraden, da $0 = 2 - 2$ gilt.	3
b)	Der Graph von f wird um eine Einheit in x- und zwei Einheiten in y-Richtung verschoben. Eine mögliche Funktionsgleichung für h ist damit: $h(x) = (x-1)^3 - 6 \cdot (x-1)^2 + 11 \cdot (x-1) - 4$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

2.2.1 Analytische Geometrie

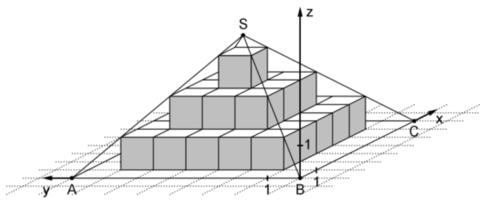
G2_1

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD. Der Pyramide ist eine Stufenpyramide einbeschrieben, die aus Würfeln mit der Kantenlänge 1 besteht.



a) Geben Sie das Volumen der Stufenpyramide und die Höhe der Pyramide ABCDS an. (2 BE)

b) Bestimmen Sie unter Verwendung eines geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystems eine Gleichung für die Gerade, die durch die Punkte B und S verläuft.
Zeichnen Sie das gewählte Koordinatensystem in die Abbildung ein. (3 BE)

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G2_1		
a)	Volumen der Stufenpyramide: 35 Höhe der Pyramide: 3,5	2
b)	z. B.: Gleichung für die Gerade: $\vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$ 	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2.2.2 Lineare Algebra

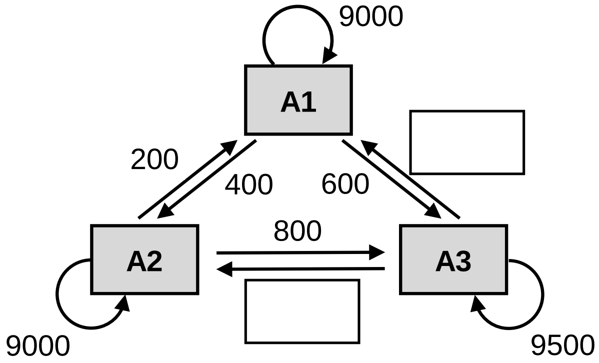
LA2_1

Zu einem bestimmten Zeitpunkt haben die drei Anbieter A1, A2 und A3 jeweils 10 000 Kunden. Die für das nächste Jahr zu erwartende Kundenwanderung zwischen diesen Anbietern wird durch die nebenstehende Übergangstabelle beschrieben.

von / nach	A1	A2	A3
A1	0,90	0,02	0,02
A2	0,04	0,90	0,03
A3	0,06	0,08	0,95

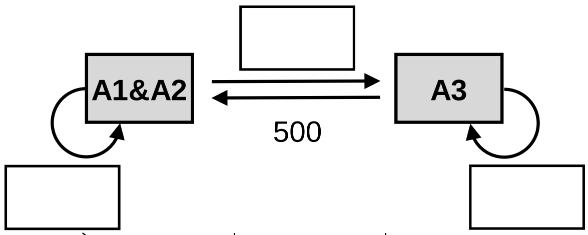
a) Vervollständigen Sie den nebenstehenden Übergangsgraphen zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres.
Geben Sie die Gesamtzahl der Kunden an, die innerhalb des nächsten Jahres den Anbieter wechseln.

(2 BE)



Ausgehend von der Ausgangsverteilung von je 10 000 Kunden wird eine Fusion der Anbieter A1 und A2 zu einem Anbieter A1&A2 geplant. Im Kundengeschäft behalten beide ihr bekanntes Profil bei, sodass angenommen werden kann, dass die Kundenwanderung im nächsten Jahr weiterhin wie in der obigen Übergangstabelle dargestellt abläuft.

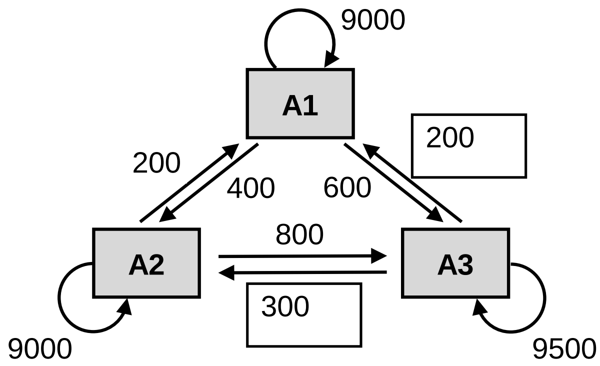
b) Vervollständigen Sie den nebenstehenden Übergangsgraphen zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres unter Berücksichtigung der Fusion.

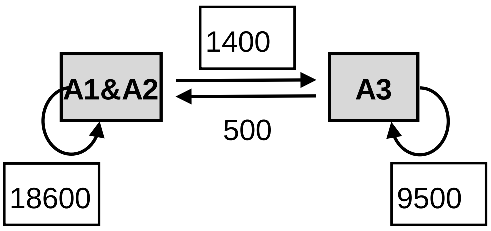


Vervollständigen Sie die nebenstehende Übergangstabelle zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres unter Berücksichtigung der Fusion.

(3 BE)

von / nach	A1&A2	A3
A1&A2		
A3		0,95

<table>
<tr><th></th><th>Erwartete Schülerleistungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>LA2_1
a)</td><td>

Insgesamt wechseln 2500 Kunden innerhalb des ersten Jahres ihren Anbieter</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

<table>
<tr><td>von / nach</td><td>A1&A2</td><td>A3</td></tr>
<tr><td>A1&A2</td><td>0,93</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>0,07</td><td>0,95</td></tr>
</table></td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.</td></tr>
</table>